



TITLE:

中野の定理の拡張について (Cousin問題について)

AUTHOR(S):

風間, 英明

CITATION:

風間, 英明. 中野の定理の拡張について (Cousin問題について). 数理解析
研究所講究録 1972, 141: 47-61

ISSUE DATE:

1972-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106690>

RIGHT:

中野の定理の拡張について

九大理 風間 英明

本講演の目的は、中野茂男[6]によるコホモロジーの消滅定理の複素解析空間への拡張について、H. Grauert und O. Riemenschneider[3]にしたがって紹介することである。

§1. 複素空間に対する Canonical line bundle と quasi positive な vector bundle について

複素空間 X と X 上の解析的連接層 S が与えられたとき、 X の部分集合

$$\mathcal{R}(X; S) = \left\{ x \in X; \begin{array}{l} x \text{ は regular point 且 } S \text{ は } x \text{ で} \\ \text{local free sheaf} \end{array} \right\}$$

を考える。そうすると $X - \mathcal{R}(X; S)$ は X の低い次元をもつ解析的集合となる。この点については、例えば Rossi[7] proposition 3.1.。また $S|_{\mathcal{R}(X; S)}$ は複素多様体 $\mathcal{R}(X; S)$ 上の解析的 vector bundle を表わすものと考えられる。以下

においては, vector bundle は γ の hol. cross sections の germs のなす層と同一視することにする。このとき次に定義を与える。

定義. 複素空間 X 上の解析的連接層 S が quasi-positive であるとは $R(X; S)$ の開且つ密な部分集合 R が存在して, R 上の解析的 vector bundle $S|_R$ が中野の意味で positive ([6]) となることである。

このとき, 中野の消滅定理において, quasi-positive なる条件は本質的でないから, 次の結果が成り立つ。

定理 1. (中野茂男 [6]). コンパクト Kähler 多様体 X 上の quasi-positive な vector bundle V に対して,

$$H^v(X, V \otimes K(X)) = 0, \quad v \geq 1$$

が成り立つ, 但し $K(X)$ は X の canonical line bundle を示す。

証明は中野茂男 [6] の Theorem 1 の証明において (n, g) 型の X 上の V に値をもつ調和形式 φ に対して,

$$\int_R X \wedge \Delta \varphi \wedge \bar{\varphi} = \int_X X \wedge \Delta \varphi \wedge \bar{\varphi}$$

に注意すれば, 残りの議論は全くそのまま成り立つので省略する。

この定理 1 を複素空間に拡張する場合に問題となるのは次の 2 点である。

- (1). 複素空間に対して, *canonical line bundle* を定義しなければならない。
- (2). コンパクト Kähler 多様体に対応する複素空間を考えなければならない。

この 2 点を Moisëzon 空間の *modification* を用いて解決する。

定義. 次元 n の既約且つコンパクトな複素空間に対し, \mathcal{O}_X の上に n 個の代数的独立な有理型函数が存在するとき, X を Moisëzon 空間と云う。

注意. Moisëzon [5] によれば Moisëzon 空間は代数的多様体による *desingularisation* をもつ。すなわち代数的多様体 \hat{X} が与えられた Moisëzon 空間 X に対して存在し $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ が X の *desingularisation* を与える。

次の事実から, Moisëzon 空間に対して, *canonical* な層を定義することが出来る。

命題. X を Moisëzon 空間, X の代数的多様体 \hat{X} による *desingularisation* を $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ とする。

このとき \hat{X} は特異点をもちないから *canonical line*

bundle $K(\hat{X})$ をもつか, π による $K(\hat{X})$ の 0 次の direct image $K(X) = \pi_{(0)}(K(\hat{X}))$ を考えよ. $K(X)$ は torsion-free な解析的連接層であり, しかも X の de-singularisation \hat{X} のとり方によらない。

証明. $(\hat{X}_1, \pi_1), (\hat{X}_2, \pi_2)$ を X の二つの desingularisations とする. このとき fiber 積 $\hat{X}_1 \times_X \hat{X}_2$ の reduction \hat{Y} から \hat{X}_1, \hat{X}_2 への自然な写像を

$$p_1: \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}_1, \quad p_2: \hat{Y} \longrightarrow \hat{X}_2$$

とする. このとき p_1, p_2 は \hat{X}_1, \hat{X}_2 の proper modification を与える. そこで (\hat{Z}, ρ) を \hat{Y} の desingularisation とすると, 次の可換図を得る。

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{X}_1 & & \\ & \nearrow \varphi_1 & & \searrow \pi_1 & \\ \hat{Z} & & & & X \\ & \searrow \varphi_2 & & \nearrow \pi_2 & \\ & & \hat{X}_2 & & \end{array}, \quad \varphi_1 = p_1 \circ \rho, \quad \varphi_2 = p_2 \circ \rho$$

我々の証明すべき事は $\pi_{1(0)}(K(\hat{X}_1)) = \pi_{2(0)}(K(\hat{X}_2))$ だが, そのためには

$$K(\hat{X}_i) = \varphi_{i(0)}(K(\hat{Z})) \quad i=1,2$$

が示されれば十分である。

proper modification $\varphi_i: \hat{Z} \longrightarrow \hat{X}_i$ の退化集合を \hat{E} とすると $E = \varphi_i(\hat{E})$ は \hat{X}_i における余次元 2 以上の解析的集合となる。一方 \hat{X}_i の任意の開集合 V に対して,

✕

$H^0(V, K(\hat{X}_i))$ は V 上の正則な n -形式全体と一致し、これは $\varphi_i^{-1}(V)$ での正則な n -形式とみなすことが出来る。したがって、

$$H^0(V, K(\hat{X}_i)) \subset H^0(\varphi_i^{-1}(V), K(\hat{Z})) \quad i=1, 2$$

を得る。一方 $\alpha \in H^0(\varphi_i^{-1}(V), K(\hat{Z}))$ とすると、

$\varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(V)-\hat{E}}$ は両正則写像だから α は $V-E$ での正則な n -形式とみなされ、Riemann の接続定理より α は V での正則な n -形式とみなされる。したがって

$$H^0(V, K(\hat{X}_i)) = H^0(\varphi_i^{-1}(V), K(\hat{Z})) \quad i=1, 2$$

つまり $K(\hat{X}_i) = \varphi_{i,*}(K(\hat{Z})) \quad i=1, 2$ が示された。

f. e. d.

定義. Moisèzon 空間 X に対し、上の命題により一意的に定まる、torsion-free な解析的連接層 $K(X)$ を X の canonical な層と云う。

よって Moisèzon 空間に対して、今定義した canonical な層と quasi-positive な層に対して Grauert の direct image sheaf の理論を用いて、定理 1 を拡張するのだから、そのために次の定理が重要な役割を果たす。

定理 2. X を algebraic variety (特異点をもつ場合に区別して、こう書くことにする。), S を quasi-positive, torsion-free な X 上の解析的連接層とする。さらに、

X の desingularisation $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ を, S の π による
inverse image $S \circ \pi_{\text{def}} \pi^* S / T(\pi^* S)$ を local free な
層にするようなものであるとき, $(T(\pi^* S))$ は $\pi^* S$ の torsion sheaf

$$\pi_{(g)}(\hat{S} \otimes K(\hat{X})) = 0 \quad g \geq 1 \quad (\text{但し } \hat{S} = S \circ \pi \text{ である})$$

となる。但し, $\pi_{(g)}$ は g 次の direct image を示す。

注意. 実は, 任意の与えられた S に対し, $S \circ \pi$ を local
free にするような desingularisation $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ が存在す
ることは Rossi [7] により保証されているのである。

証明. 帰納法による。 $g=1$ のとき命題が正しいことを先ず

示す。 $\mathcal{U} = \{U_\rho\}$, $\mathcal{V} = \{V_\sigma\}$ を, それぞれ, X , \hat{X} の
Stein coverings とする。 \mathcal{U} から作る \hat{X} の covering
 $\hat{\mathcal{U}} = \{\hat{U}_\rho = \pi^{-1}(U_\rho)\}$ を考える。 covering $\hat{\mathcal{U}}$, \mathcal{V} から
次のような double complex を作る。

$$C^{r,s} = \prod_{\substack{\rho_0 \dots \rho_r \\ \sigma_0 \dots \sigma_s}} T(\hat{U}_{\rho_0} \cap \hat{U}_{\rho_1} \cap V_{\sigma_0} \cap \dots \cap V_{\sigma_s}, \hat{S} \otimes K)$$

但し, $K = K(\hat{X})$ である。 $i = r$

$$\delta': C^{r,s} \rightarrow C^{r+1,s}$$

$$\delta'': C^{r,s} \rightarrow C^{r,s+1}$$

$$\delta(f)_{\rho_0 \dots \rho_{r+1} \sigma_0 \dots \sigma_s} = \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k \int_{\rho_0 \dots \hat{\rho}_k \dots \rho_{r+1} \sigma_0 \dots \sigma_s}$$

$$\delta''(f)_{\rho_0 \dots \rho_r \sigma_0 \dots \sigma_{s+1}} = \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \int_{\rho_0 \dots \rho_r \sigma_0 \dots \hat{\sigma}_k \dots \sigma_{s+1}}$$

で定義する。明らかに

$$\{C^{r,s}, \delta', \delta''\}$$

は double complex を作る。

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^{0,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,0} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,0} & \xrightarrow{\delta'} & \cdots \\
 \delta'' \downarrow & & \delta'' \downarrow & & \delta'' \downarrow & & \\
 C^{0,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,1} & \xrightarrow{\delta'} & \cdots \\
 \delta'' \downarrow & & \delta'' \downarrow & & \delta'' \downarrow & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 C^{0,v-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,v-1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,v-1} & \xrightarrow{\delta'} & \cdots \\
 \delta'' \downarrow & & \delta'' \downarrow & & \delta'' \downarrow & & \\
 C^{0,v} & \xrightarrow{\delta'} & C^{1,v} & \xrightarrow{\delta'} & C^{2,v} & \xrightarrow{\delta'} & \cdots
 \end{array}$$

π は proper であるから $\hat{U}_p = \pi^{-1}(U_p)$ は正則多様体である。
 $\tau: \hat{U} \cap V_{\sigma_0 \dots \sigma_r} = \{ \hat{U}_p \cap V_{\sigma_0 \dots \sigma_r} \}_p$ は $V_{\sigma_0 \dots \sigma_r}$ の Stein covering である。 $\tau: V_{\sigma_0 \dots \sigma_r}$ の Stein 性より

$$H^r(V_{\sigma_0 \dots \sigma_r} \cap \hat{U}, \hat{S} \otimes \hat{K}) = 0 \quad r \geq 1$$

つまり、上の可換図列は exact になる。

$$H^{2,0} = Z^{2,0} / B^{2,0}, \quad Z^{2,0} = \{ f \in C^{2,0} : \delta'' f = 0, \delta' f = 0 \}$$

$$B^{2,0} = \{ \delta' f : f \in C^{1,0} \text{ 且 } \delta'' f = 0 \}$$

$$\text{よって}, \quad Z^{2,0} \cong Z^2(\hat{U}, \hat{S} \otimes \hat{K}), \quad B^{2,0} \cong B^2(\hat{U}, \hat{S} \otimes \hat{K}).$$

よって

$$H^{2,0} = H^2(\hat{U}, \hat{S} \otimes \hat{K})$$

よって。仮定より、 X は algebraic variety であるから X 上
 には quasi-positive line bundle F が存在する。 $\chi = \tau^*$

$\hat{F} = \pi^*F / T(\pi^*F)$. $T(\pi^*F)$ は π^*F の torsion 元のなる π^*F の部分層とする, を考えよと

$$\hat{S} \otimes \hat{F}^l = \widehat{S \otimes F^l}, \quad l \text{ は tensor power を示す。}$$

が成り立つ, さらに F が local free であることから

$$\pi_{(g)}(\widehat{S \otimes F^l \otimes K}) = \pi_{(g)}(\hat{S} \otimes \hat{K}) \otimes F^l \quad g=0,1,2,\dots$$

が成り立つ。したがって, $\pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{K}) = 0$ を示すこと

と, 或る l に対して, $\pi_{(0)}(\widehat{S \otimes F^l \otimes K}) = 0$ を示すこと

は同値である。よって, 今後, l を十分大きいものとして,

S を $S \otimes F^l$ と見立てて証明すればよい。一方 Grauert [2]

によれば, 十分大きな l_0 が存在し, 任意の $l \geq l_0$ に対

して, $H^{v+1}(X, \pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{K}) \otimes F^l) = 0, \quad v \geq 0$

となる。よって, 我々の場合

$$H^2(X, \pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{K})) = 0$$

となるものとしてよい。一方

$$\begin{aligned} H^2(X, \pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{K})) &= H^2(\mathcal{U}, \pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{K})) \\ &= H^2(\hat{\mathcal{U}}, \hat{S} \otimes \hat{K}) \\ &= H^{2,0} \end{aligned}$$

だから, $H^{2,0} = 0$, としてよいわけである。今, 我々

は, $\pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{K}) \neq 0$, として矛盾を導く。このとき,

必要ならば, l を十分大きく取って S を $S \otimes F^l$ と見

做すことにより, $H^2(X, \pi_{(0)}(\hat{S} \otimes \hat{K}))$ の non-zero 元

$$a \in T(X, \pi_{*}(\hat{S} \otimes \hat{K}))$$

が存在するものとしてよい。この a から $H^1(X, \hat{S} \otimes \hat{K})$ の non-zero cohomology class を作り。

$$\Gamma(U_p, \pi_{*}(\hat{S} \otimes \hat{K})) = H^1(\hat{U}_p, \hat{S} \otimes \hat{K})$$

より, $\zeta_p \in Z^1(\hat{U}_p \cap V, \hat{S} \otimes \hat{K})$ が存在して,

$$a|_{U_p} = [\zeta_p] : \zeta_p \text{ の属する } H^1(\hat{U}_p, \hat{S} \otimes \hat{K}) \text{ における class}$$

と取り。定義より, $\{\zeta_p\}_p \in C^{0,1} \cap \{\delta''\zeta_p = 0\}$ 。

$\zeta = \tau$, $\zeta \equiv \delta'\{\zeta_p\} \in C^{1,1}$ とする。

$$[\zeta_{p_0}] = [\zeta_{p_1}] \text{ in } H^1(\hat{U}_{p_0} \cap \hat{U}_{p_1}, \hat{S} \otimes \hat{K})$$

より, $\alpha_{p_0 p_1} \in C^0(\hat{U}_{p_0} \cap \hat{U}_{p_1} \cap V, \hat{S} \otimes \hat{K})$ が存在して

$$\zeta_{p_0 p_1} = \zeta_{p_1} - \zeta_{p_0} = \delta''(\alpha_{p_0 p_1})$$

を満足する。よって $\alpha = \{\alpha_{p_0 p_1}\} \in C^{1,0}$ と取り,

$$\zeta = \delta''\alpha, \text{ が成り立つ。又, } \delta'(\delta'\alpha) = 0, \delta''(\delta'\alpha) = 0$$

と仮定から, $\delta'\alpha \in Z^{2,0}$, とある。 $H^{2,0} = 0$ とある

から, $\delta'\alpha \in B^{2,0}$, を得る。すなわち, $\eta \in C^{1,0}$

が存在し, $\delta''\eta = 0$ 且つ $\delta'\alpha = \delta'\eta$ が成り立つ。よって,

$$\delta'(\alpha - \eta) = 0 \text{ となる double complex の}$$

横列の exactness より, $\beta \in C^{0,0}$ が存在し, $\alpha - \eta = \delta'\beta$

をみたす。よって, $\zeta_p^* \equiv \zeta_p - \delta''\beta_p$, とおくと

$$\begin{aligned} \delta'\{\zeta_p^*\} &= \delta'\{\zeta_p\} - \delta''\delta'\{\beta_p\} \\ &= \zeta - \delta''(\alpha - \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \zeta - \delta'' \alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

と成る。したがって, $C'(\mathcal{U}, \hat{S} \otimes \hat{K}) = C^{0,1} \cap \ker \delta'$.

より, $\zeta^* \in C'(\mathcal{U}, \hat{S} \otimes \hat{K})$ と成る。又

$$\delta'' \zeta_f^* = \delta''(\zeta_f - \delta'' \beta_f) = \delta'' \zeta_f = 0 \quad \text{だから,}$$

$\zeta^* \in Z'(\mathcal{U}, \hat{S} \otimes \hat{K})$ と成る。且つ,

$$a|_{U_f} = [\zeta_f] = [\zeta_f^*], \quad \text{又 } a \neq 0, \quad \text{より,}$$

$$a = [\zeta^*] \in H'(\mathcal{U}, \hat{S} \otimes \hat{K}) = H'(\mathcal{X}, \hat{S} \otimes \hat{K}) = \Gamma(\mathcal{X}, \pi_{*}(\hat{S} \otimes \hat{K}))$$

故に, $H'(\mathcal{X}, \hat{S} \otimes \hat{K}) \neq 0$ と成る。これは,

\mathcal{X} が代数的多様体であって, \hat{S} が quasi-positive であることと定理 1 に照らし合わせると矛盾が得られる。よって,

$$\pi_{*}(\hat{S} \otimes \hat{K}) = 0 \quad \text{を得る。}$$

証明の後半は, $v \leq k$ のとき $\pi_{(v)}(\hat{S} \otimes \hat{K}) = 0$ と仮定して, $\pi_{(v+1)}(\hat{S} \otimes \hat{K}) = 0$ を導くのだが, この部分は, Grauert and Riemenschneider [3] に証明が詳しく示されている。しかも, 前半の証明において, double complex の cohomology $H^{2, v-1} \cong H^{v+1, 0}$ に注意すれば, 殆んど同様に証明されるので, ここでは述べないことにする。

q. e. d.

この定理 2 から我々の所要の結果を導くのだが, それには, 次の direct image sheaf に関する, よく知られた結果

を用いる。この定理を証明することは本論とは少しはなれるので証明は省略する。

定理3. X, Y を複素空間, $\pi: X \rightarrow Y$ を正則写像で, \mathcal{F} を X 上の解析的層とする。このとき次の(1), (2)が成り立つ。

(1). π が proper で \mathcal{F} が連接ならば $\pi_{(0)}(\mathcal{F})$ も Y 上の解析的連接層となる。

(2) もし $\pi_{(q)}(\mathcal{F}) = 0 \quad q \geq 1$, ならば,

$$H^v(X, \mathcal{F}) \cong H^v(Y, \pi_{(0)}(\mathcal{F})) \quad v \geq 1$$
 が成り立つ。

この講演の目的であった次の定理が成り立つ。

定理4. X を Moisëzon 空間, \mathcal{S} を torsion-free, 且つ quasi-positive な, X 上の解析的連接層とする。このとき

$$H^v(X, \pi_{(0)}(\hat{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{K}(X))) = 0 \quad v \geq 1, \quad \hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cdot \pi$$
 が成り立つ。特に \mathcal{S} が local free のときは,

$$\pi_{(0)}(\hat{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{K}(X)) = \mathcal{S} \otimes \mathcal{K}(X), \quad \mathcal{K}(X) \text{ は } X \text{ の canonical 層,}$$
 となるのでこれは中野の定理1の拡張になっていることがわかる。

証明. Rossi [7] により存在が保証された, desingularization $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ をとる。すなわち, \hat{X} は代数的多様体であって, $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cdot \pi = \pi^* \mathcal{S} / \mathcal{I}(\pi^* \mathcal{S})$ が local free とは

3) 同様な desingularisation $\pi: \hat{X} \rightarrow X$ を考える。このとき、 $\pi_{1q}(\hat{S} \otimes K(\hat{X})) = 0$, $q \geq 1$ を示す。仮定より X は Moisëzon 空間だから、Artin[1]の結果より、 X の任意の点 x_0 に対して、algebraic variety Y と、 Y から X への正則写像 $\varphi: Y \rightarrow X$, さらに Y の解析的集合 E が存在し、 φ は $Y - E$ 上は局所正則且つ $x_0 \in \varphi(Y - E)$ とする。そこで $\hat{Y} = Y \times_X \hat{X}$ を $Y \times \hat{X}$ の fibre 積としておく、そうすると \hat{Y} はやはり algebraic variety である。したがって、Hironaka[4]の結果より、代数的多様体 \hat{Y} には \hat{S} の desingularisation $\rho: \hat{\hat{Y}} \rightarrow \hat{Y}$ がある。そこで、この ρ と \hat{Y} から Y, \hat{X} への自然な写像との合成をそれぞれ、 σ, ψ と書く、次の commutative diagram を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{\hat{Y}} & \xrightarrow{\psi} & \hat{X} \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \pi \\
 Y & \xrightarrow{\varphi} & X
 \end{array}$$

π が proper であることより、 σ も又 proper となる。 $S \circ (\pi \circ \psi) = S \circ (\sigma \circ \varphi) = (S \circ \pi) \circ \psi = (S \circ \varphi) \circ \sigma$ は $\hat{\hat{Y}}$ 上の quasi-positive, local free 層である。したがって、定理2より

$$\sigma_{(v)}(S \circ (\sigma \circ \varphi) \otimes K(\hat{\hat{Y}})) = 0 \quad v \geq 1$$

を得る。 ψ は $\hat{E} = \sigma^{-1}(E)$ を除いて、局所両正則であり、

$x_0 \in \pi(\varphi(\hat{Y}-\hat{E}))$ と存在。又 φ は $Y-E$ で局所両正則
 且つ $x_0 \in \varphi(Y-E)$ と存在するように取ったのだから、

$$\pi_{(v)}(S \circ (\sigma \circ \varphi) \otimes K(\hat{Y})) = 0 \quad v \geq 1$$

より、 x_0 の或る近傍で

$$\pi_{(v)}(S \otimes K(\hat{X})) = 0 \quad , \quad v \geq 1$$

が得られる。この議論は X の任意の点 x_0 で出来るのだから

$$\pi_{(v)}(S \otimes K(\hat{X})) = 0 \quad \text{on } X \quad , \quad v \geq 1$$

を得る。したがって定理3(2)より、 $v \geq 1$ のとき

$$H^v(X, \pi_{(v)}(S \circ \pi \otimes K(\hat{X}))) \cong H^v(\hat{X}, S \circ \pi \otimes K(\hat{X}))$$

と存在。 $S \circ \pi$ は quasi-positive とあり、 \hat{X} は代数的多
 様体であるから、中野の定理1より、

$$H^v(\hat{X}, S \circ \pi \otimes K(\hat{X})) = 0 \quad v \geq 1$$

も得て証明は終る。

q. e. d.

§2. その他

§1 で singularity がある場合に、desingularisation を
 用いて、canonical 層を作ることを述べたが、次の
 Grothendieck による canonical 層も考えることが
 出来る。しかし、この場合には中野の定理1の拡張が成り
 立たないことが、Grauert and Riemenschneider [3]
 により確かめられている。すなわち、次のような事実がある

る。今 X を n 次元の複素空間とする。このとき X の structure sheaf を \mathcal{O} とする。 X の開集合 U が \mathbb{C}^m の開集合 D の解析的集合上に両正則に写されたとき、 K を D の canonical 層に対して $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^i(\mathcal{O}_U, K) = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, d-1$

但し、 \mathcal{O} は D の正則な数群の局、 $d = m - n$ 、が成り立つ。
よって、

$$K^*(U) \equiv \text{Ext}_{\mathcal{O}}^d(\mathcal{O}_U, K) \mid U$$

と置き、 $K^*(U)$ を張り合わせて X 上の層 K^* を作る。この K^* を Grothendieck の canonical 層と云う。明らかに、もし X が non-singular ならば $K^* = K(X)$ である、但し $K(X)$ は多様体 X の普通の意味での canonical line bundle を示すものとする。実際、 K^* の定義より、 X が non-singular ならば、

$$K^* = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^0(\mathcal{O}, K) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, K) = K$$

となるからである。

Gravert and Riemenschneider [3] は K^* に関しては中野の定理の拡張、定理4が成り立たない例を作っている。

すなわち、normal な3次の Moisozon空間 X で、

$H^1(X, K^* \otimes F) \neq 0$ 、 F は X 上の positive line bundle となるものが存在する。

引用文献

- [1] Artin, M. : Algebraization of formal moduli :
II. Existence of modifications. Ann. Math. 91,
88-135(1970).
- [2] Grauert, H. : Über Modifikationen und exzeptionelle
analytische Mengen. Math. Ann. 146, 331-368(1962).
- [3] ——— und Riemenschneider, O. : Verschwindungssätze
für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen
Räumen. Invent. Math. 11, 263-292(1970).
- [4] Hironaka, H. : Resolution of singularities of an
algebraic variety over a field of characteristic zero :
I, II. Ann. Math. 79, 109-326(1964).
- [5] Moisezon, B. G. : Resolution theorems for compact complex
spaces with a sufficiently large field of meromorphic
functions. Math. USSR-Izvestija 1. 1331-1356(1967).
- [6] Nakano, S. : On complex analytic vector bundles.
J. Math. Soc. Japan 7, 1-12(1955).
- [7] Rossi, H. : Picard variety of an isolated singular point.
Rice Univ. Studies 54, 63-73(1968).